

III Parziale - Compito A

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

1) Studiare la seguente funzione irrazionale con indice di radice dispari:

$$y = \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è una irrazionale con indice di radice dispari, il suo insieme di definizione coincide esattamente con il campo di esistenza del radicando, che nel caso specifico è un polinomio definito su tutta la retta reale, cioè:

$$C.E. = \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione irrazionale, dunque, non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono risolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{2} \cong 1,25 \end{cases} \Rightarrow A = (0, \sqrt[3]{2}) \text{ è il punto di intersezione della} \\ &\text{funzione con l'asse } y \\ \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = \sqrt{2} \cong 1,41 \\ x = -\sqrt{2} \cong -1,41 \end{cases} &\Rightarrow B = (1,0), C = (-1,0), D = (\sqrt{2}, 0), E = (-\sqrt{2}, 0) \\ &\text{sono i punti di intersezione della} \\ &\text{funzione con l'asse } x \end{aligned}$$

Si osservi che la scomposizione del radicando, ovvero del polinomio di quarto grado $x^4 - 3x^2 + 2$ è stata ottenuta utilizzando la regola di Ruffini. Infatti risulta:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

da cui, procedendo per tentativi, si ha:

$$P(x=+1) = 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

cioè per $x=+1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	1	0	-3	0	2
+1		1	1	-2	-2
	1	1	-2	-2	0

III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - 2x - 2)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di terzo grado:

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$$

utilizzando sempre la regola di Ruffini. Si ha:

$$Q(x = -1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 2 = -1 + 1 + 2 - 2 = 0$$

cioè per $x = -1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & & -1 & 0 & +2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Pertanto il polinomio $Q(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^2 - 2)$$

da cui si ricava:

$$P(x) = (x-1)(x^3 + x^2 - 2x - 2) = (x-1)(x+1)(x^2 - 2) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2} > 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x-\sqrt{2} > 0 \\ x+\sqrt{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x > \sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$$

	$-\sqrt{2}$	-1	$+1$	$+\sqrt{2}$
	---	---	---	+++++
	---	+++++	+++++	+++++
	---	---	---	+++
	--	+++++	+++++	+++++
	++	--	+++++	----
	$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$	$y < 0$

III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - 3x^2 + 2)} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

Ne segue che, per

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

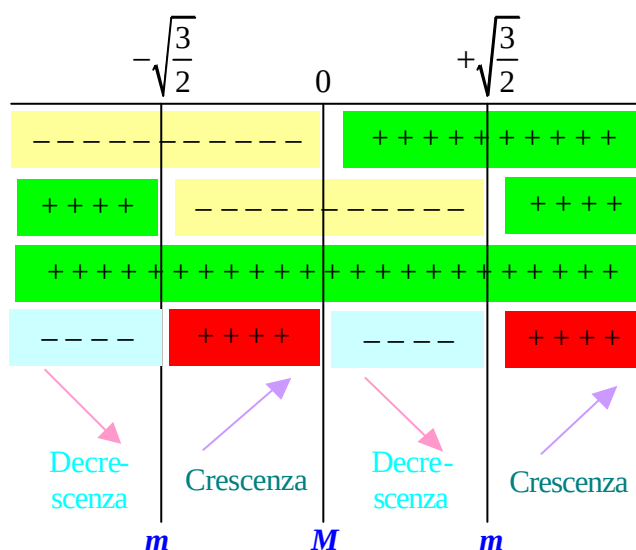
Si ottiene:

$$D\left(\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2}\right) = \frac{D(x^4 - 3x^2 + 2)}{3\sqrt[3]{(x^4 - 3x^2 + 2)^2}} = \frac{4x^3 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^4 - 3x^2 + 2)^2}}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{4x^3 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^4 - 3x^2 + 2)^2}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 6x > 0 \\ 3\sqrt[3]{(x^4 - 3x^2 + 2)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(2x^2 - 3) > 0 \\ \text{sempre (ilradicando è unquadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \cong -1,22; x > +\sqrt{\frac{3}{2}} \cong +1,22 \\ \text{sempre} \end{cases}$$



III Parziale - Compito A

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

Dunque la funzione ha un massimo in $x = 0$ e due minimi, uno in $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ed uno in $x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$.

In particolare si ha:

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cong -0,63$$

$$x = +\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cong -0,63$$

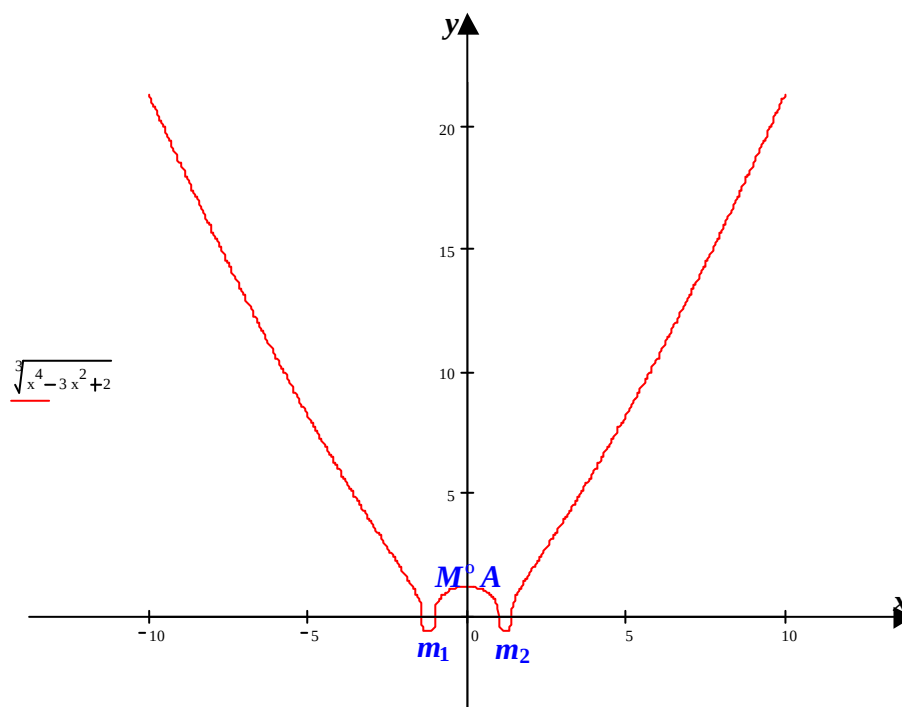
Ne segue, quindi, che:

$m_1(-1,22; -0,63)$ è il punto di *minimo*

$m_2(+1,22; -0,63)$ è il punto di *minimo*

$M(0; 1,25) \equiv A$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

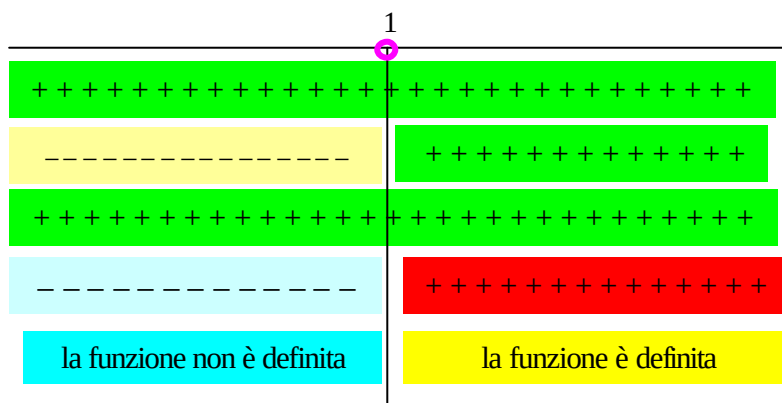
2) Studiare la seguente funzione irrazionale con indice di radice pari:

$$y = \sqrt{\frac{x^4}{x^3 - 1}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

La funzione data è irrazionale con indice di radice pari ed il suo radicando è una frazione. Pertanto risulta:

$$\begin{aligned} C.E. &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^4}{x^3 - 1} \geq 0, x^3 - 1 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x^4 \geq 0 \\ x^3 - 1 > 0 \\ x^3 - 1 \neq 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{sempre} \\ (x-1)(x^2 + x + 1) > 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) \neq 0 \end{cases} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{sempre} \\ \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x^2 + x + 1 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{sempre} \\ \begin{cases} x > 1 \\ \text{sempre } (\Delta < 0) \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{sempre } (\Delta < 0) \end{cases} \end{cases} \right\} \end{aligned}$$



$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < +\infty\}$$

Ne segue che la retta di equazione $x = 1$ rappresenta un *Asintoto Verticale* per la funzione data.

$$AV.: x = 1$$

Osserviamo che il polinomio $x^3 - 1$ può essere scomposto utilizzando la regola di Ruffini oppure ricordando la formula della differenza di due cubi.

III Parziale - Compito A

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo, in primo luogo, che non ha senso determinare il punto di intersezione della funzione con l'asse delle ordinate, ovvero con la retta di equazione $x=0$, in quanto la funzione è definita solo per $x > 1$. Vediamo, pertanto, se la funzione interseca l'asse delle x . Risulta:

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^4}{x^3-1}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A=(0,0) \equiv O$$

Dunque la funzione non interseca neanche l'asse delle ascisse in quanto il punto $(0,0)$ non appartiene al campo di esistenza della funzione.

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$\begin{aligned} y > 0 &\Rightarrow \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}} > 0 \Rightarrow \frac{x^4}{x^3-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^4 > 0 \\ x^3-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ (x-1)(x^2+x+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x-1 > 0 \\ x^2+x+1 > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x > 1 \\ \text{sempre } (\Delta < 0) \end{cases} \Rightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Dunque la funzione è sempre positiva all'interno del suo campo di esistenza.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4}{x^3-1} \right)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

Ne segue che:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

dunque la funzione non ha Asintoti Orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D\left(\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\right) = \frac{D\left(\frac{x^4}{x^3-1}\right)}{2\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}} \cdot \frac{4x^3 \cdot (x^3-1) - x^4 \cdot (3x^2)}{(x^3-1)^2} =$$

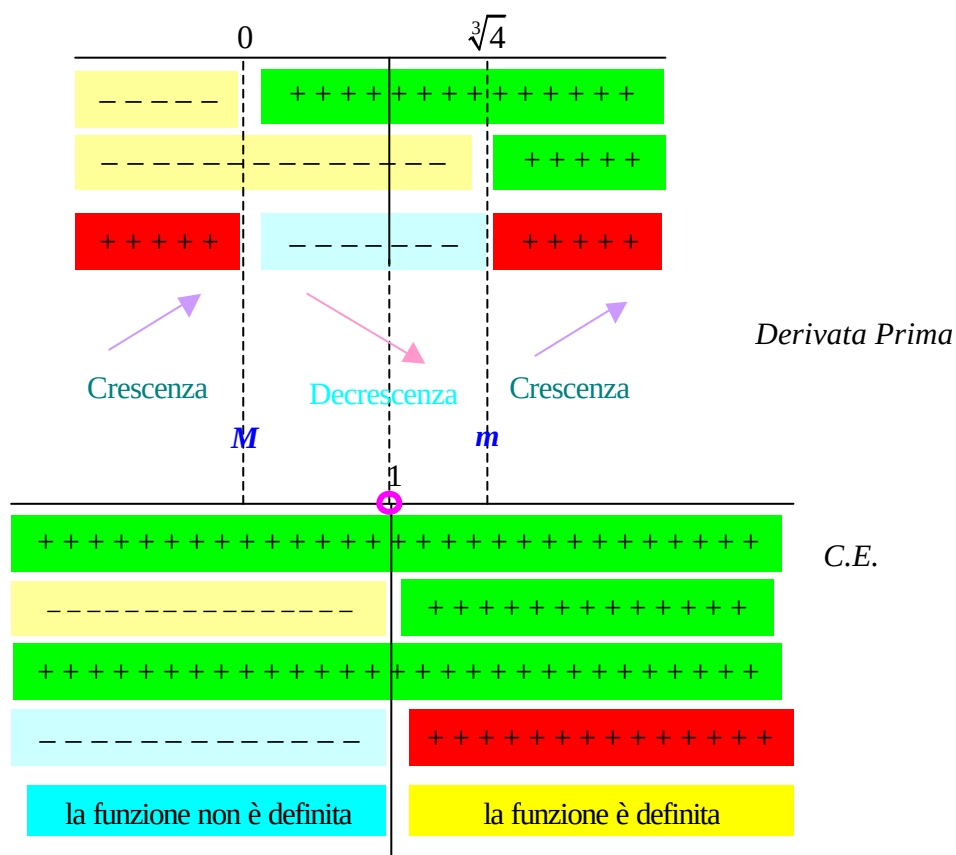
III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}} \cdot \frac{4x^6-4x^3-3x^6}{(x^3-1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}} \cdot \frac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}} \cdot \frac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^6-4x^3 > 0 \\ \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}} > 0 \\ (x^3-1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3(x^3-4) > 0 \\ \text{sempre nel C.E.} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ x^3-4 > 0 \\ \text{sempre nel C.E.} \\ \text{sempre} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \sqrt[3]{4} \cong 1,58 \\ \text{sempre nel C.E.} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

Dunque la funzione data ammette un massimo in $x=0$, che non esiste perché in tale punto non è definita, ed un minimo in $x=\sqrt[3]{4}$, la cui esistenza è, invece, garantita dal campo di definizione della funzione.

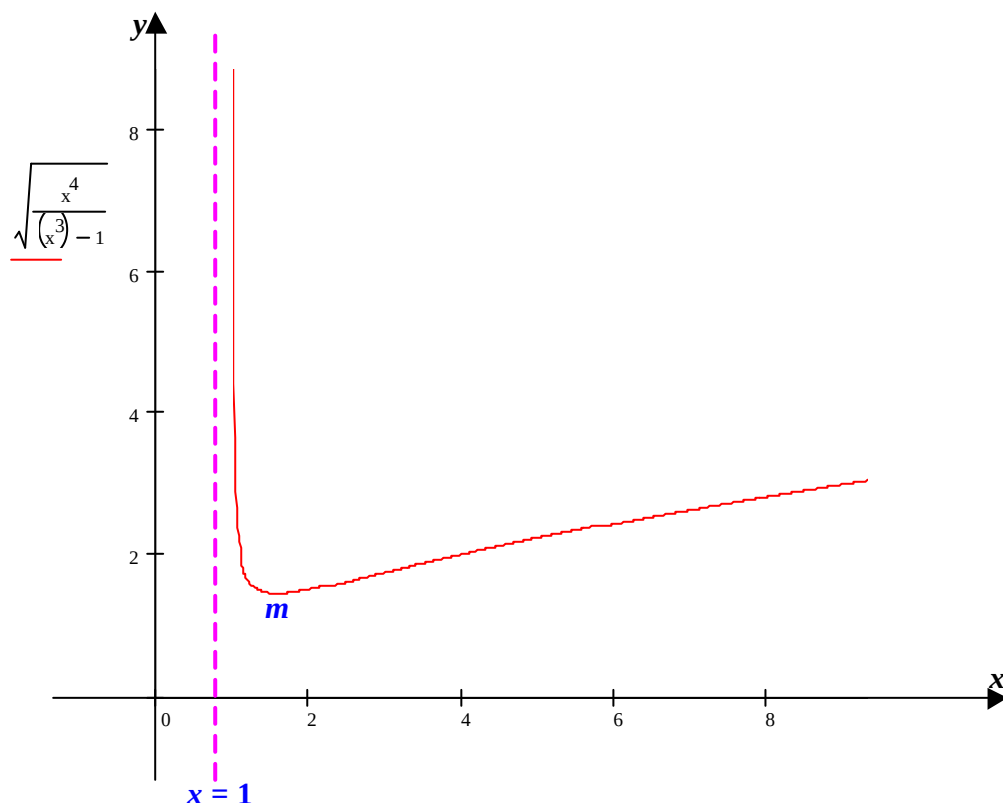
In particolare si ha:

$$x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow y \cong 1,45$$

Ne segue, quindi, che:

$m(1,58; 1,45)$ è il punto di *minimo*

IL GRAFICO.



III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

3) Studiare la seguente funzione esponenziale:

$$y = e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione esponenziale, il cui esponente è una frazione, il suo campo di esistenza è rappresentato da tutto l'asse reale esclusi i punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +\infty\}$$

Trattandosi, però, di una funzione esponenziale, non è detto che la retta $x = -1$ sia un asintoto verticale per la funzione assegnata.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{-12}{1}} = e^{-12} \cong 0,000006 \end{cases} \Rightarrow A = (0, e^{-12}) \\ &\text{è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y \\ \begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \text{ non ci sono intersezioni con l'asse } x \end{aligned}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} > 0 \Rightarrow \text{sempre (la funzione esponenziale è sempre positiva), cioè:}$$

+++++

$$y > 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x-12}{x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+x-12}{x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \end{aligned}$$

cioè la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro per la funzione:

$$A.O.S.: y = 0$$

III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$D\left(e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}}\right) = e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \cdot D\left(\frac{x^2+x-12}{x+1}\right) = e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \cdot \left(\frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x-12) \cdot 1}{(x+1)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \cdot \left(\frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x+12}{(x+1)^2}\right) = e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \cdot \left(\frac{x^2+2x+13}{(x+1)^2}\right)$$

da cui:

$$y' > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} \cdot \left(\frac{x^2+2x+13}{(x+1)^2}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} > 0 \\ \frac{x^2+2x+13}{(x+1)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2+x-12}{x+1}} > 0 \\ x^2+2x+13 > 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2+2x+13 > 0 \ (\Delta < 0) \\ \text{sempre (in quanto è unquadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ \text{sempre} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

Infatti si ha:

$$x^2+2x+13=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4-13}}{1} = -1 \pm \sqrt{-9} \Rightarrow \Delta < 0$$

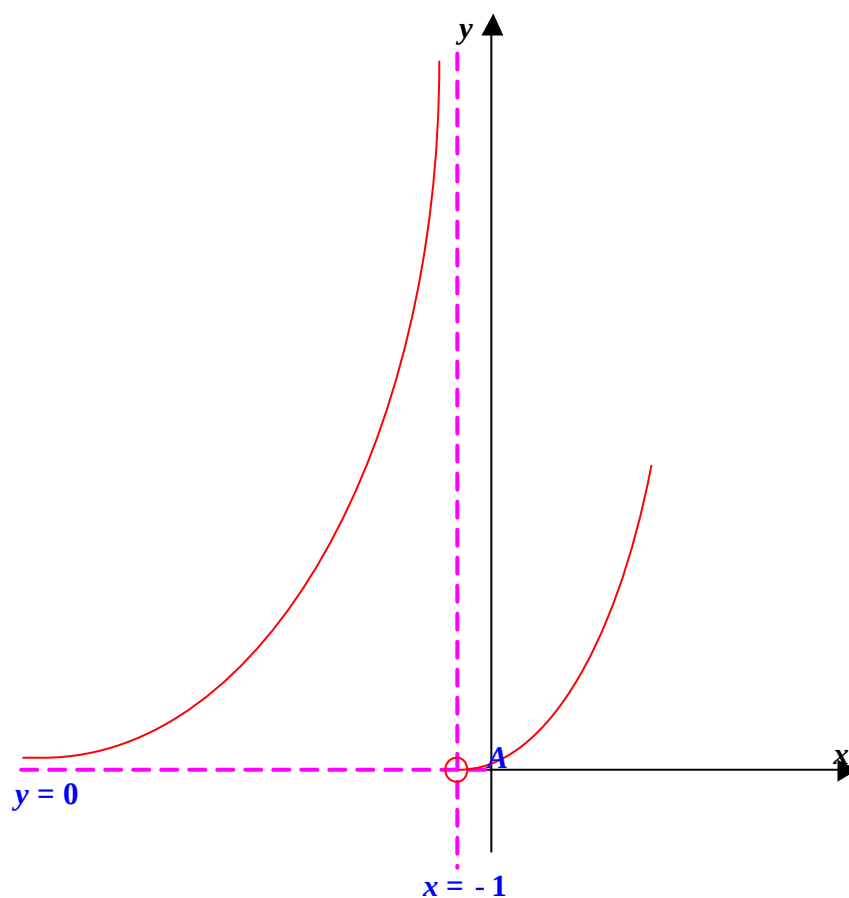


Crescenza Crescenza Crescenza

Dunque la funzione è sempre crescente, cioè non ha né un massimo né un minimo.

III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

IL GRAFICO.



III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

4) Studiare la seguente funzione logaritmica:

$$y = \ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)$$

CAMPO DI ESISTENZA.

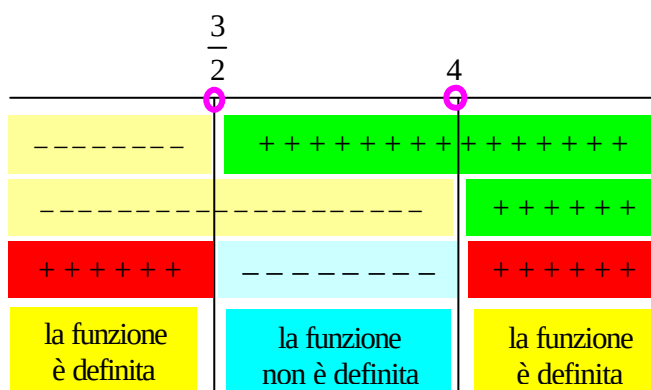
Poiché la funzione data è logaritmica ed il suo argomento è una frazione, occorre considerare contemporaneamente il campo di definizione sia della funzione logaritmica (argomento positivo) che della funzione razionale fratta (denominatore diverso da zero):

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \frac{2x-3}{x-4} > 0 \text{ (per il logaritmo)} \\ x-4 \neq 0 \text{ (per la frazione)} \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ x-4 > 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x > \frac{3}{2} = 1,5 \\ x > 4 \\ x \neq 4 \end{cases} \right\}$$

Ne segue subito che le rette di equazione $x=4$ (si annulla il denominatore della frazione) ed $x=\frac{3}{2}$ (si annulla il numeratore della frazione per cui l'argomento del logaritmo è uguale a zero ed è ben noto che $\ln(0)=-\infty$) sono due asintoti verticali per la funzione assegnata:

$$A.V.: x=4, x=\frac{3}{2}$$



$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \frac{3}{2}, 4 < x < +\infty \right\}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

III Parziale - Compito A

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Per determinare l'intersezione della funzione con gli assi cartesiani occorre risolvere, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \ln\left(\frac{0-3}{0-4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \ln\left(\frac{-3}{-4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \cong -0,28 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \ln\frac{3}{4}\right)$$

è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2x-3}{x-4} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2x-3}{x-4} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2x-3-x+4}{x-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x+1}{x-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B = (-1, 0)$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

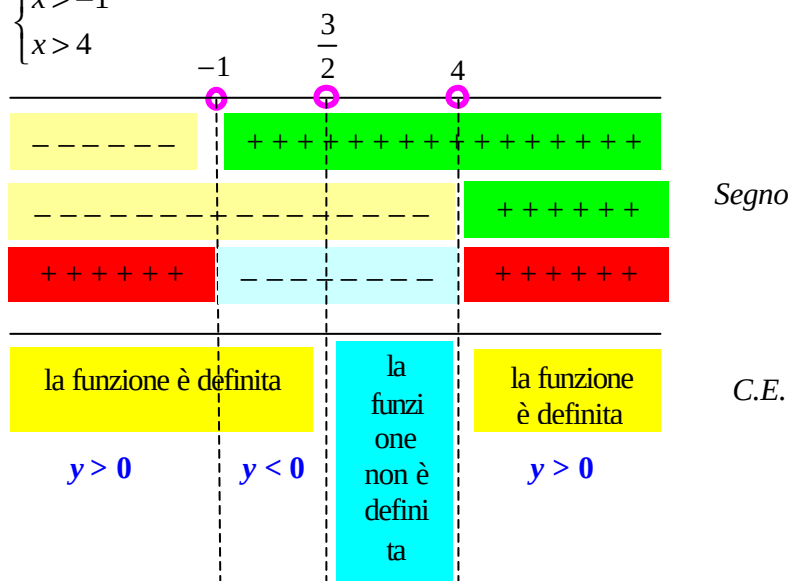
Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Quindi:

$$y > 0 \Rightarrow \ln\left[\frac{2x-3}{x-4}\right] > 0 \Rightarrow e^{\ln\left[\frac{2x-3}{x-4}\right]} > e^0 = 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x-4} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x-4} - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 4 \end{cases}$$



III Parziale - Compito A

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{2x-3}{x-4} \right) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{x-4} \right) \right] = \ln(2) \cong 0,69$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{2x-3}{x-4} \right) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{x-4} \right) \right] = \ln(2)$$

Ne segue che:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \ln(2)$$

cioè la retta di equazione $y = \ln(2)$ è un *Asintoto Orizzontale* sia *destro* che *sinistro* della funzione.

$$AO.: y = \ln(2)$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

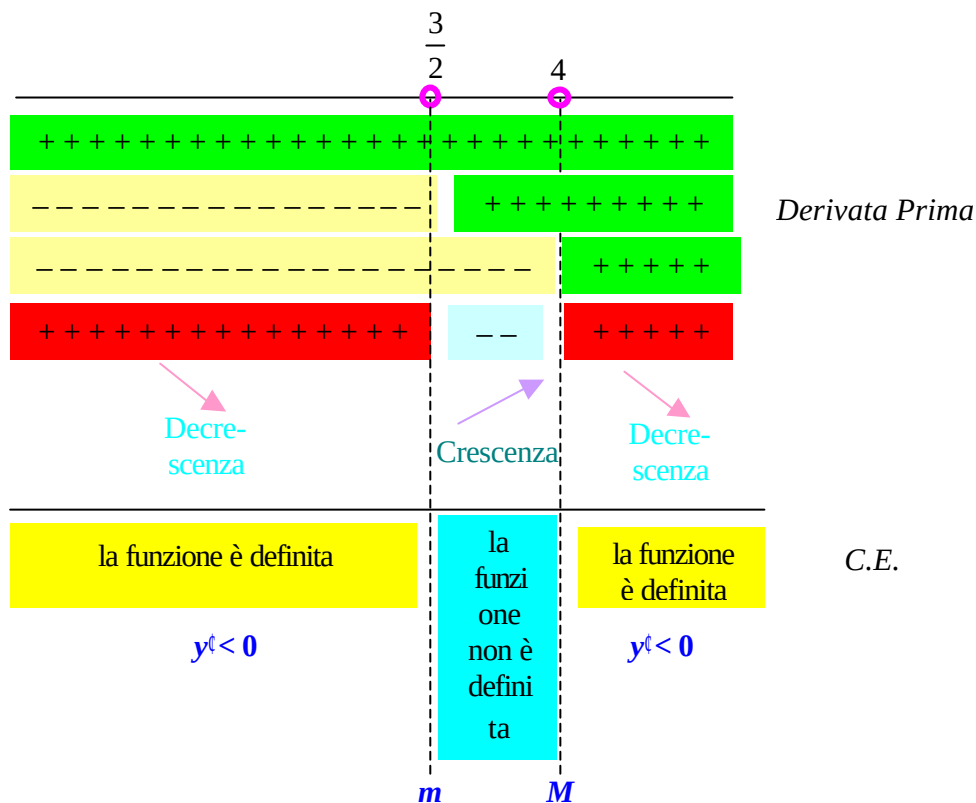
Si ha:

$$\begin{aligned} D \left[\ln \left(\frac{2x-3}{x-4} \right) \right] &= \frac{1}{\frac{2x-3}{x-4}} \cdot D \left(\frac{2x-3}{x-4} \right) = \frac{x-4}{2x-3} \cdot \left(\frac{2 \cdot (x-4) - (2x-3) \cdot 1}{(x-4)^2} \right) = \\ &= \frac{x-4}{2x-3} \cdot \frac{2x-8-2x+3}{(x-4)^2} = \frac{1}{2x-3} \cdot \frac{-5}{x-4} = -\frac{5}{(2x-3)(x-4)} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow -\frac{5}{(2x-3)(x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{5}{(2x-3)(x-4)} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 5 > 0 \\ 2x-3 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x > \frac{3}{2} \\ x > 4 \end{cases}$$

III Parziale - Compito A
 29/05/2006
 A.A. 2005 – 2006



Osserviamo, però, che nei punti in cui la funzione dovrebbe ammettere dei massimi e de minimi, essa non è definita. Dunque non esistono né punti di massimo né punti di minimo per la funzione assegnata.

III Parziale - Compito A
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

IL GRAFICO.

